

# Les Eléments d'Euclide (300 av JC)



La révolution mathématique

# \* Que sait-on du mathématicien Euclide ?

- Euclide est peut-être né vers 325 avant J.C et mort en 265 avant J.C. Il a écrit plusieurs ouvrages dont un très célèbre qui regroupe 13 livres: **Les Éléments**
- On ne sait pas grand-chose de ce mathématicien, peut-être s'agissait-il du nom d'une école ?
- On sait par exemple que le livre X a été écrit par le mathématicien Théétète

# \* En quoi les Éléments est une révolution en mathématique ?

- Les Éléments d'Euclide ont révolutionné les mathématiques car c'est grâce à cet ouvrage qu'on a pu construire les bases des mathématiques
- C'est la première fois que le savoir est organisé de manière **hypothético-déductive** (la démonstration)

## Qu'est-ce qu'un postulat (ou demande) ?

C'est ce qu'Euclide demande que l'on accepte pour pouvoir démontrer toutes les autres propositions

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger continuellement, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque et avec un intervalle quelconque décrire une circonférence de cercle.

4. Tous les angles droits sont égaux
5. Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, les deux droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

# Il est équivalent d'exprimer le postulat 5

En écrivant

5. Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, les deux droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

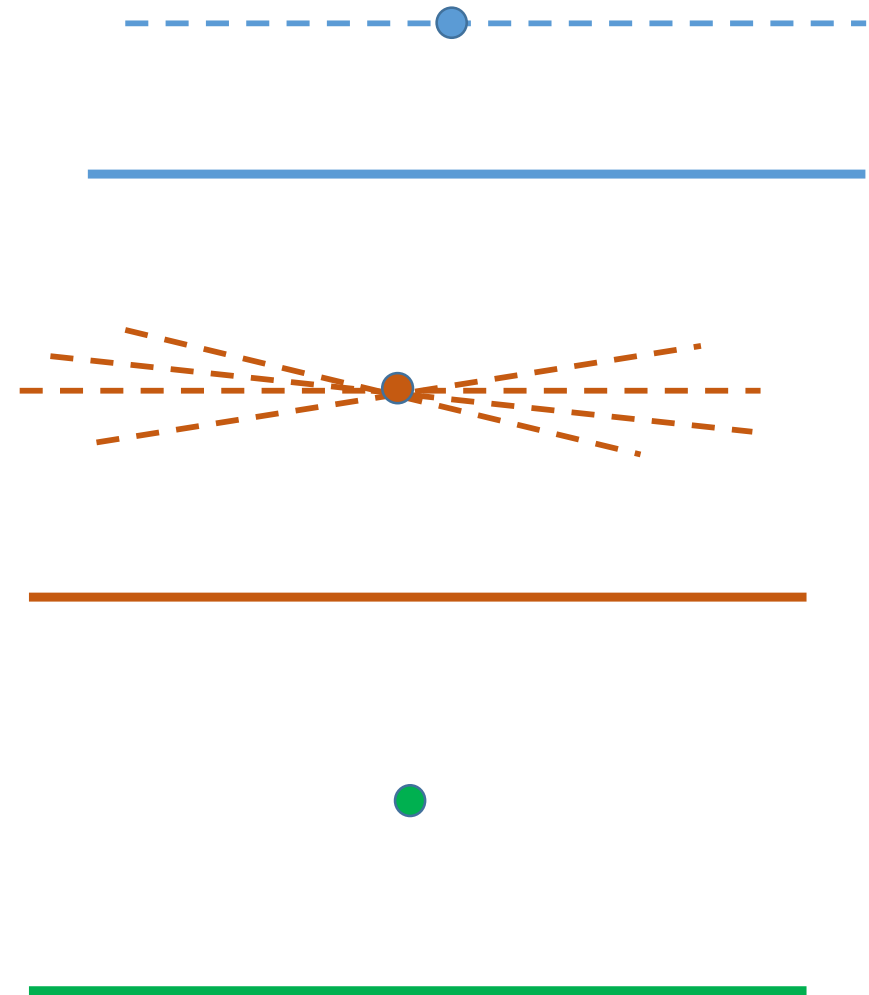
*Ou en écrivant*

***« Par un point, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée »***

# C'est quoi le postulat 5 des Éléments ? Pourquoi a-t-il posé problème ?

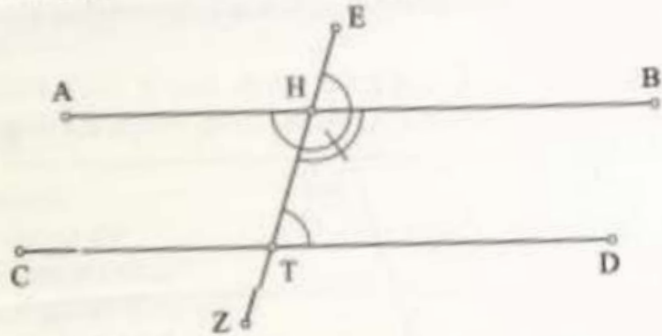
« *Par un point, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée* »

- Le postulat 5 a posé problème car d'autres mathématiciens (Ibn Al Haytam, Saccheri, Lambert...), ont voulu prouver que avec les quatre autres postulats on pouvait démontrer le 5ème mais il n'y avait que des démonstrations fausses
- Des mathématiciens (Gauss, Bolyai, Lobatchevsky) vont supposer qu'on peut accepter un postulat qui est différent du postulat 5, par exemple « **en un point il passe une infinité de parallèles !** » ou « **en un point il ne passe aucune parallèle !** »
- Ainsi en acceptant de ne pas dire que le postulat 5 est vrai on trouve d'autres géométries qui sont cohérentes (**géométrie hyperbolique** et **géométrie sphérique** )



**PROPOSITION 29.** Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entre eux ; l'angle extérieur est égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté ; et les angles intérieurs placés du même côté sont égaux à deux droits.

EXPOSITION. Que la droite EZ tombe sur les droites parallèles AB, CD ; je dis que cette droite fait les angles alternes AHT, HTD égaux entre eux ; l'angle extérieur EHB est égal à l'angle HTD intérieur opposé et placé du même côté ; et les angles BHT, HTD intérieurs et placés du même côté sont égaux à deux droits.



DÉMONSTRATION. Car si l'angle AHT n'est pas égal à l'angle HTD, l'un d'eux est plus grand. Que l'angle AHT soit plus grand que HTD. Ajoutons l'angle commun BHT, les angles AHT, BHT seront plus grands que les angles BHT, HTD ; mais les angles AHT, BHT sont égaux à deux droits (**proposition 13**) ; donc les angles BHT, HTD sont moindres que deux droits. Mais si deux droites sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont plus petits que deux droits, ces deux droites se rencontrent (**demande 5**) ; donc les droites AB, CD prolongées à l'infini se rencontreront. Mais elles ne se rencontreront pas, puisqu'elles sont parallèles ; donc les angles AHT, HTD ne sont point inégaux ; donc ils sont égaux. Mais l'angle AHT est égal à l'angle EHB (**proposition 15**) ; donc l'angle EHB est égal à l'angle HTD. Ajoutons l'angle commun BHT, les angles EHB, BHT seront égaux aux angles BHT, HTD ; mais les angles EHB, BHT sont égaux à deux droits (**proposition 13**) ; donc les angles BHT, HTD sont égaux à deux droits. Donc, une droite qui

tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entre eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits. Ce qu'il fallait démontrer.

## La proposition n°29 du livre 1 des Eléments d'Euclide

L'idée de la proposition 29 c'est **qu'il veut qu'on trace 2 droites parallèles et une droite sécante aux deux parallèles et il démontre que les angles alternes-internes sont de même mesure**

Pour cela il utilise la proposition 13 et 15 du livre 1 et aussi pour la première fois la demande 5 (ou postulat 5)

C'est la première proposition qui utilise le postulat 5, c'est-à-dire les propositions 1 à 28 n'utilise pas le postulat 5 (elles sont donc vraies dans les autres géométries !)